

Processus aléatoires
et
problème de Dirichlet.

Introduction

Dans un condensateur, le potentiel électrostatique vérifie $\Delta V = 0$ ainsi que des conditions aux limites sur les armatures. Le problème de Dirichlet consiste à montrer l'existence et l'unicité du potentiel dans de telles conditions. On se donne donc un ouvert connexe borné D de \mathbb{R}^d , ainsi qu'une fonction continue V_0 sur la frontière ∂D de D . D représente l'espace vide inter-armatures, ∂D les armatures et V_0 le "potentiel aux bornes". Il s'agit alors de montrer l'existence et l'unicité de V tel que $\Delta V = 0$ sur D et $V = V_0$ sur ∂D . Cette généralisation mathématique permettra d'étendre les résultats obtenus à la diffusion thermique ou n'importe quel problème physique faisant intervenir des fonctions harmoniques.

L'unicité est facile à prouver en utilisant le principe du maximum. La partie difficile du problème de Dirichlet est donc l'existence. On peut l'obtenir en minimisant la fonctionnelle $V \rightarrow \int_D \|\vec{\nabla} V\|^2$ mais on a alors besoin d'espaces de Sobolev, ce qui est inaccessible à notre niveau. Nous avons choisi une approche probabiliste, ce qui permet une construction explicite de la solution.

Afin de simplifier l'étude, nous nous contentons dans un premier temps du problème discret. Ainsi, dans une première partie, après avoir introduit des notions et théorèmes de probabilité, nous étudions les marches aléatoires à temps discret. Nous verrons en effet que celles-ci jouent un rôle crucial dans la résolution du problème de Dirichlet discret — c'est-à-dire sur le réseau \mathbb{Z}^d . De plus nous retrouvons avec des outils élémentaires (formule de Stirling), le théorème central limite dans le cas des marches aléatoires.

La deuxième partie est consacrée à sa résolution explicite. Dans cet esprit, nous introduisons les chaînes de Markov. Cette partie est la plus théorique. Nous définissons la chaîne de Markov sur un espace dénombrable, dont nous admettons l'existence. Ensuite, nous démontrons la propriété de Markov, ce qui permet de trouver une solution au problème de Dirichlet.

La troisième partie est consacrée à la résolution informatique du cas discret et du cas continu. Nous introduisons alors le mouvement brownien qui permet de trouver une solution dans le cas continu de même que les marches aléatoires le permettaient dans le cas discret. De même, nous avons réalisé des programmes en Caml qui permettent de visualiser des solutions approchées. Enfin, nous étudions la complexité moyenne de notre algorithme et nous la comparons à d'autres méthodes de résolution numérique.

Toutefois, étant donné la difficulté des outils mis en jeu relativement à notre niveau, les résultats les plus difficiles de probabilité ou de théorie de l'intégration, comme le théorème d'arrêt pour les martingales, l'existence de Brownien ou de la chaîne de Markov canonique sont admis. Les résultats plus abordables sont par contre démontrés.

1 Marches aléatoires à temps discret.

1.1 Préliminaires.

Pour commencer, rappelons des résultats utiles de probabilité.

Définition 1.1 : Classe monotone.

Un sous ensemble \mathcal{M} de $\mathcal{P}(E)$ est une classe monotone lorsque :

- (i) $E \in \mathcal{M}$
- (ii) Si $A, B \in \mathcal{M}$ alors $B \cap A^c \in \mathcal{M}$
- (iii) Si A_n est une suite croissante d'éléments de \mathcal{M} , \mathcal{M} contient $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Ainsi, il est évident qu'une tribu est une classe monotone. Une intersection quelconque de classes monotones reste une classe monotone, ainsi, comme pour les tribus, on peut définir la classe monotone engendrée par une partie \mathcal{C} de $\mathcal{P}(E)$ et on la note $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{C} \subset M} M$.

Théorème 1.1 : Lemme de Classe monotone.

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ est stable par intersections finies alors $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$ (la tribu engendrée par \mathcal{C}), ou de manière équivalente, $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est une tribu.

DÉM : Il suffit en fait de montrer que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est stable par intersections finies. En effet une fois qu'on sait cela les vérifications à faire pour les axiomes d'une tribu sont faciles. On fixe donc $A \in \mathcal{C}$ et on pose $\mathcal{M}_1 = \{B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \mid A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}$. On a bien sur $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_1$. On vérifie ensuite que c'est une classe monotone (preuve omise pour gagner en concision, elle n'est pas difficile). La propriété de minimalité de $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ montre alors que \mathcal{M}_1 contient $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. On a donc :

$$\forall A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}); A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$$

On fixe alors $B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ et on pose $\mathcal{M}_2 = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \mid A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}$. On vient de montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_2$. Ensuite on vérifie que \mathcal{M}_2 est une classe monotone, ce qui conclut la preuve. \square

Proposition 1.1 :

Soient $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ des sous-tribus de \mathcal{B} , tribu sur laquelle on définit une mesure de probabilité P . On se donne pour tout i une classe $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{B}_i$, stable par intersections finies, contenant Ω (l'espace probabilisé) et telle que $\sigma(\mathcal{C}_i) = \mathcal{B}_i$. De plus on suppose que $P(C_1 \cap \dots \cap C_n) = P(C_1) \dots P(C_n)$ pour tous $C_i \in \mathcal{B}_i$. Alors les tribus \mathcal{B}_i sont indépendantes.

DÉM : Par définition de l'indépendance, montrons que : $\forall B_i \in \mathcal{B}_i, P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = P(B_1) \dots P(B_n)$. On fixe C_2, \dots, C_n et on pose $\mathcal{M}_1 = \{B_1 \in \mathcal{B}_1 \mid P(B_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n) = P(B_1)P(C_2) \dots P(C_n)\}$. On vérifie que $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{M}_1$ et que \mathcal{M}_1 est une classe monotone. Le lemme de classe monotone assure alors que $\mathcal{M}(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}_1$. Et donc on a montré que dans la propriété de l'énoncé on peut prendre C_1 dans \mathcal{B}_1 et pas seulement dans \mathcal{C}_1 . On reproduit alors le raisonnement en fixant $B_1 \in \mathcal{B}_1, C_i \in \mathcal{C}_i$ et une récurrence montre le résultat voulu. \square

Proposition 1.2 :

On prend $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ des tribus indépendantes et on les regroupe en deux paquets $\mathcal{D}_1 = \sigma(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p), \mathcal{D}_2 = \sigma(\mathcal{B}_{p+1}, \dots, \mathcal{B}_n)$. Alors \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont indépendantes.

DÉM : On prend $\mathcal{C}_1 = \{B_1 \cap \dots \cap B_p\}$ et $\mathcal{C}_2 = \{B_{p+1} \cap \dots \cap B_n\}$. On applique ensuite la proposition précédente. \square

Proposition 1.3 :

Soit $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille infinie de tribus indépendantes. Alors pour tout $p, \mathcal{D}_1 = \sigma(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ et $\mathcal{D}_2 = \sigma(\mathcal{B}_{p+1}, \dots)$ sont indépendantes.

DÉM : On prend $\mathcal{C}_1 = \mathcal{B}_1$ et $\mathcal{C}_2 = \bigcup_{k=p+1}^{+\infty} \sigma(\mathcal{B}_{p+1}, \dots, \mathcal{B}_k) \subset \mathcal{D}_2$. Et on applique le proposition 1.2 pour montrer que \mathcal{C}_2 est stable par intersections finies. Ensuite, la proposition 1.1 donne le résultat. \square

Définition 1.2 :

Si A_n est une suite d'évènements, on note $\limsup A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

Théorème 1.2 : Lemme de Borel-Cantelli

Soit A_n une suite d'évènements.

- (i) Supposons $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$. Alors $P(\limsup A_n) = 0$ ou de manière équivalente, presque tout ω n'appartient qu'à un nombre fini de A_i .
- (ii) Si $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$ et que les A_n sont indépendants, $P(\limsup A_n) = 1$ ou de manière équivalente, presque tout ω appartient à un nombre infini de A_i .

DÉM :

- (i) On a $E[\sum_n \mathbf{1}_{A_n}] = \sum_n P(A_n) < +\infty$. Donc $\sum_n \mathbf{1}_{A_n} < \infty$ P-p.s.
- (ii) Remarquons déjà que l'hypothèse d'indépendance est indispensable puisque par exemple en prenant $A_n = A$ pour tout n , avec $0 < P(A) < 1$. Ensuite on fixe n_0 et $n \geq n_0$. Alors l'indépendance des A_k (et donc des A_k^c) donne $P(\bigcap_{k=n_0}^n A_k^c) = \prod_{k=n_0}^n P(A_k^c) = \prod_{k=n_0}^n (1 - P(A_k))$. Un résultat classique d'analyse montre alors que puisque la série des $P(A_k)$ diverge, ce produit converge vers 0 quand n tend vers l'infini. On a donc $P(\bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k^c) = 0$. On obtient alors $P(\bigcup_{n_0=0}^{\infty} \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k^c) = 0$ puis, en passant au complémentaire, $P(\limsup A_n) = 1$. \square

Théorème 1.3 : Loi du tout ou rien.

Soit X_n une suite de v.a. indépendantes, à valeurs dans des espaces mesurables quelconques. On définit $\mathcal{B}_n = \sigma(X_k, k \geq n)$ et $\mathcal{B}_\infty = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{B}_n$. Cette dernière tribu est grossière, i.e. $\forall B \in \mathcal{B}_\infty, P(B) \in \{0; 1\}$.

DÉM : On pose $\mathcal{D}_n = \sigma(X_k; k \leq n)$. D'après la proposition 1.3, \mathcal{D}_n est indépendante de \mathcal{B}_{n+1} et donc de \mathcal{B}_∞ . Alors on a montré que pour tout A de $\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{D}_n$ et tout B de \mathcal{B}_∞ , $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Mais la classe \mathcal{C} est stable par intersections finies et la proposition 1.1 montre que \mathcal{B}_∞ est indépendante de $\sigma(\mathcal{C})$. \mathcal{B}_∞ est donc en particulier indépendante d'elle même et donc si $B \in \mathcal{B}_\infty$, $P(B) = P(B \cap B) = P(B)^2$, ce qui n'est possible que si $P(B) \in \{0; 1\}$. \square

1.2 Application aux marches aléatoires.

Théorème 1.4 : Comportement de la marche aléatoire simple.

Soit X_n une suite de v.a. indépendantes, de même loi μ telle que $P(X_n = 1) = 1/2 = P(X_n = -1)$. Pour $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

C'est la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} , issue de 0. Alors :

$$\text{p.s. } \sup_{n \geq 1} S_n = +\infty \quad \text{et} \quad \inf_{n \geq 1} S_n = -\infty$$

Et en particulier, S_n s'annule presque sûrement une infinité de fois.

DÉM : Commençons par montrer que pour tout $p \geq 1$, $P(A) = 0$ si $A = \{-p \leq \inf S_n \leq \sup S_n \leq p\}$. On fixe alors $k > 2p$ et on remarque que $\bigcup_{j=0}^{\infty} \{X_{jk+1} = \dots = X_{jk+k} = 1\} \subset A^c$. En effet si l'on est dans l'un des ensembles de gauche, alors $S_{jk+k} = 2p + S_{jk}$. De trois choses l'une, si $S_{jk} < -p$, on a bien $\inf S_n < -p$. Si $S_{jk} > p$, on a bien $\sup S_n > p$. Enfin, si $-p \leq S_{jk} \leq p$, $S_{jk+k} > p$.

Ensuite, on montre que l'ensemble $\bigcup_{j=0}^{\infty} \{X_{jk+1} = \dots = X_{jk+k} = 1\}$ a une probabilité 1. On pose en effet $A_j = \{X_{jk+1} = \dots = X_{jk+k} = 1\}$. Les évènements A_j sont indépendants grâce à la proposition 1.3 et leur probabilité vaut $\frac{1}{2^k}$. On a donc $\sum_j P(A_j) = +\infty$ et le lemme de Borel-Cantelli montre que presque tout ω appartient à une infinité de A_j , donc à A . On a donc :

Pour tout $p \geq 0$, $P(\{-p \leq \inf S_n \cap \sup S_n \leq p\}) = 0$. En faisant tendre p vers l'infini, $P(\{-\infty < \inf S_n \cap \sup S_n < +\infty\}) = 0$. Puis, en passant au complémentaire, $P(\{-\infty = \inf S_n \cup \sup S_n = +\infty\}) = 1$. D'où, $P(\{-\infty = \inf S_n\}) + P(\{\sup S_n = +\infty\}) \geq 1$.

Comme on a bien entendu que ces deux probabilités sont égales (par symétrie), elles sont toutes deux strictement positives. Or l'évènement $\{\sup S_n = +\infty\}$ est dans la tribu asymptotique \mathcal{B}_{∞} puisque pour tout $k \geq 1$, $\{\sup S_n = +\infty\} = \{\sup_{n \geq k} (X_k + \dots + X_n) = +\infty\} \in \mathcal{B}_k$ (ce qui traduit le fait que les premiers termes, en nombre fini, ne jouent pas de rôle). La loi du tout ou rien montre alors que $P(\{\sup S_n = \infty\}) = 1$. \square

On a donc montré que la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} n'est pas bornée. En prenant une autre loi, telle que $P(X_n = -1) = 1/4 = P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 0) = 1/2$, on aurait obtenu le même résultat. On peut ensuite étendre ce résultat en dimension supérieure. Ainsi, prenons la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^2 , de loi $P(X_n = \pm e_i) = 1/4$, où e_i sont les deux vecteurs de la base canonique de \mathbb{Z}^2 . En la projetant sur la droite $y = 0$, on obtient une marche aléatoire uni-dimensionnelle, de loi donnée ci-dessus, dont on sait qu'elle diverge presque sûrement. On peut donc énoncer le même théorème en dimension 2 :

Théorème 1.5 :

Soit X_n une suite de v.a. indépendantes, de même loi donnée par $P(X_n = (0, \pm 1)) = 1/4$ et $P(X_n = (\pm 1, 0)) = 1/4$. Posons $S_n = X_1 + \dots + X_n$ la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^2 issue de 0. Alors :

$$p.s. \quad \sup(S_n)_x = +\infty = \sup(S_n)_y \quad \text{et} \quad \inf(S_n)_x = -\infty = \inf(S_n)_y$$

Où $(S_n)_x$ (resp. $(S_n)_y$) représente la coordonnée selon x (resp. selon y) de S_n .

On peut tout de suite donner un intérêt pratique à ce théorème. Dans la résolution approchée de l'équation de Poisson dans un domaine borné, on lance des marches aléatoires simples d'un point de l'intérieur et on note la valeur du potentiel au point de sortie. Grâce à ce théorème, on est assuré que ce programme termine. Toutefois, on ne peut pas évaluer sa complexité. Pour cela, il faudrait connaître le temps moyen de sortie d'une boule pour une marche aléatoire simple dans le plan. C'est ce que nous ferons à la fin de la deuxième partie.

1.3 La convergence en loi de la marche aléatoire simple.

Comme nous le verrons dans la troisième partie le mouvement Brownien est une "limite" de marches aléatoires. Pour comprendre dans quel sens se fait ce passage à la limite, on a besoin de la notion de convergence en loi. On rappelle ainsi que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des fonctions continues bornées sur \mathbb{R} , munit de la norme de la convergence uniforme.

Définition 1.3 : Convergence en loi.

Une suite (X_n) de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d converge en loi vers X lorsque pour toute φ de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$, $E[\varphi(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} E[\varphi(X)]$.

Remarquons que dans cette définition, la limite n'est pas définie de manière unique et que les v.a. peuvent être définies sur des espaces de probabilité différents.

On admettra qu'on peut prendre $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ à la place de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ dans la définition. Cela constitue un théorème relativement difficile et dont la démonstration n'aurait pas la place dans cet exposé.

Théorème 1.6 : théorème de la limite centrale.

Soit X_n une suite de v.a. indépendantes, de même loi, de carré intégrables. On pose $\sigma^2 = \text{var}(X_1)$. Alors on sait que :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n - nE(X_1)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(Loi)} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ désigne la loi gaussienne centrée de variance σ^2 , de densité $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$.

Nous admettrons également ce théorème dans sa généralité, car sa démonstration nécessite trop de théorie supplémentaire. Toutefois, nous allons le démontrer dans le cas de la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} et ce avec des outils élémentaires.

Prenons une marche aléatoire $S_n = X_1 + \dots + X_n$ où les X_k sont indépendantes et vérifient $P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = 1/2$ et montrons la propriété :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq \frac{n}{2} + \sqrt{n}} C_n^k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 e^{-2x^2} dx$$

Cela revient en fait à prendre pour ϕ (dans la convergence en loi) l'indicatrice du segment $[0; 1]$.

Pour ce faire, on utilise la formule de Stirling $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$:

On écrit donc $C_n^k \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{n}{k}\right)^n \left(\frac{k}{n-k}\right)^{n-k}$. En effet, si n tend vers l'infini, k "le suit" s'il reste dans l'intervalle entier considéré. Examinons chacun des trois facteurs.

- $\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}$. On écrit $k = n/2 + h$. Alors ce terme vaut $\sqrt{\frac{n}{\frac{n^2}{4} - h^2}}$. Un D.L donne alors $\frac{2}{\sqrt{n}} (1 + 2\frac{h^2}{n^2}) \sim \frac{2}{\sqrt{n}}$.
Soit :

$$\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \sim \frac{2}{\sqrt{n}}$$

- $\left(\frac{n}{k}\right)^n$ Avec la même astuce de notation, prenons le log de cette quantité. $n \ln\left(\frac{n}{k}\right) = n \ln\left(\frac{n}{n/2 + h}\right) = n \ln 2 - n \ln(1 + 2h/n)$. On effectue alors un D.L à l'ordre 2 du log pour obtenir $n \ln 2 - 2h + 2\frac{h^2}{n^2} + o(1)$. On a alors le droit de prendre l'exponentielle pour obtenir :

$$\left(\frac{n}{k}\right)^n \sim 2^n e^{-2h} e^{2\frac{h^2}{n}}$$

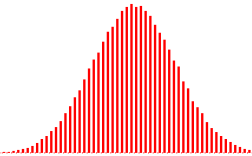
- $\left(\frac{k}{n-k}\right)^{n-k}$ On fait de même, mais cette fois le calcul est plus pénible. Le log de cette quantité vaut $(n/2 - h) \ln\left(\frac{n/2 + h}{n/2 - h}\right)$, soit $(n/2 - h) \ln\left[\left(1 + \frac{2h}{n}\right)\left(1 + \frac{2h}{n} + \frac{4h^2}{n^2} + o(1/n)\right)\right]$. On simplifie alors cette expression sous la forme : $(n/2 - h) \ln\left[1 + \frac{4h}{n} + \frac{8h^2}{n^2} + o(1/n)\right] = (n/2 - h)(4h/n + o(1/n))$, en utilisant le D.L du logarithme en 1. On obtient finalement $2h - 4h^2/n^2 + o(1)$. En passant à l'exponentielle on a :

$$\left(\frac{k}{n-k}\right)^{n-k} \sim e^{2h} e^{-4\frac{h^2}{n}}$$

En regroupant ces résultats, on a donc pour k dans l'intervalle considéré :

$$2^{-n} C_n^k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-2\left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right)^2} + o(1/\sqrt{n})$$

Ce qui permet de conclure, en reconnaissant une somme de riemann. On a donc montré le théorème central limite dans le cas particulier d'une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} . Il est intéressant de le vérifier informatiquement, et de constater la convergence en loi. (c-f annexe pour le programme réalisant cela).



et l'allure gaussienne de la loi apparaît clairement.

2 Chaînes de Markov et problème de Dirichlet discret.

2.1 Définitions et premières propriétés.

Définition 2.1 : Loi conditionnelle.

Soient X, Y deux v.a. à valeurs dans (E, \mathcal{E}) . On appelle loi conditionnelle de Y sachant X toute application $\nu : E \times \mathcal{E} \rightarrow [0; 1]$ telle que :

- (i) Pour tout $x, A \rightarrow \nu(x, A)$ est une mesure de probabilité sur \mathcal{E} .
- (ii) Pour tout $A, x \rightarrow \nu(x, A)$ est une application mesurable.
- (iii) Pour toute fonction h mesurable positive, on a :

$$E[h(Y)|X] = \int_E h(y)\nu(X, dy)$$

Ainsi, on aura $P(Y \in A|X) = \nu(X, A)$ p.s. et tous les calculs d'espérance conditionnelle sont considérablement facilités.

Remarque : Une application qui vérifie (i) et (ii) est appelée probabilité de transition de E dans E .

Désormais, on supposera qu'on se place sur un espace E dénombrable, muni de la tribu de ses parties.

Définition 2.2 : Matrice stochastique.

Une matrice stochastique sur E est une famille $(Q(x, y))_{(x, y) \in E^2}$ de réels telle que :

- (i) $0 \leq Q(x, y) \leq 1$ pour tout x, y .
- (ii) $\sum_{y \in E} Q(x, y) = 1$ pour tout x .

La notion précédente et celle de probabilité de transition sont équivalentes. En effet, si Q est une matrice stochastique, $\nu(x, A) = \sum_{y \in A} Q(x, y)$ est une probabilité de transition de E dans E et si ν est une probabilité de transition, $Q(x, y) = \nu(x, \{y\})$ est une matrice stochastique.

On définit par récurrence les puissances de Q comme $Q_1 = Q$ et $Q_{n+1}(x, y) = \sum_z Q_n(x, z)Q(z, y)$. On vérifie facilement que Q_n est une matrice stochastique (cette définition correspond au produit matriciel classique si E est fini).

Pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, on définit $Qf(x) = \sum_{y \in E} Q(x, y)f(y)$.

Définition 2.3 : Chaîne de Markov.

Soit Q une matrice stochastique et X_n un processus aléatoire à valeurs dans E . On dit que X_n est une chaîne de Markov de matrice de transition Q lorsque pour tout n , la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant (X_0, \dots, X_n) est $Q(X_n, y)$. De manière équivalente cela signifie que :

$$P(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = Q(x_n, y)$$

dès que $P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) > 0$.

Intuitivement, le fait que la loi conditionnelle de X_{n+1} ne dépende que de X_n signifie que le processus ne se soucie pas du passé pour déterminer son comportement dans le futur mais seulement du présent. Cette propriété est appelée propriété de Markov.

Remarque : Soit $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ une suite de v.a. indépendantes, à valeurs dans \mathbb{Z}^d , de même loi μ . Alors $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ est une chaîne de Markov, de matrice de transition Q donnée par $Q(x, y) = \mu(\{y - x\})$.

Proposition 2.1 :

Un processus (X_n) à valeurs dans E est une chaîne de Markov de matrice de transition Q ssi :

$$P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_0 = x_0)Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{n-1}, x_n)$$

De plus, on a si $P(X_0 = x_0) > 0$, $P(X_n = x_n | X_0 = x_0) = P(X_0 = x_0)Q_n(x_0, x_n)$

DÉM : Elle est facile en utilisant la définition d'une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$. Pour la dernière assertion, on utilise que $Q_n(x_0, x_n) = \sum_{x_1, \dots, x_{n-1}} Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{n-1}, x_n)$.

Remarque : Cette propriété montre que la loi du vecteur (X_0, \dots, X_n) ne dépend que de Q et de la loi initiale.

Proposition 2.2 :

Soit (X_n) une chaîne de Markov de matrice de transition Q .

$$E[f(X_{n+1})|X_0, \dots, X_n] = \sum_{y \in E} Q(X_n, y)f(y) = Qf(X_n)$$

DÉM : C'est la définition d'une loi conditionnelle.

2.2 Chaîne de Markov canonique, propriété de Markov simple.

Proposition 2.3 :

Soit Q une matrice stochastique sur E . Alors il existe un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ sur lequel il existe, pour tout $x \in E$, un processus (X_n^x) qui est une chaîne de Markov de matrice de transition Q et tel que $X_0^x = x$ p.s.

DÉM : ADMIS

Dans la suite, on posera $\Omega = E^{\mathbb{N}}$. Il servira d'espace canonique sur lequel on définira nos chaînes de Markov. Un élément $\omega \in \Omega$ est de la forme $(\omega_0, \omega_1, \dots)$. On définit les applications coordonnées comme $X_n(\omega) = \omega_n$ et les opérateurs de translation comme $\theta_n(\omega) = (\omega_n, \omega_{n+1}, \dots)$. On munit Ω de la plus petite tribu, notée \mathcal{F} , qui rende mesurable les applications coordonnées. On remarque aussi que \mathcal{F} est la tribu engendrée par les cylindres, soit les ensembles $C = (\omega | \omega_0 = x_0, \dots, \omega_p = x_p)$. De plus, on munit Ω de la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$.

Proposition 2.4 :

Soit (B, \mathcal{B}) un espace mesurable et soit ψ une application de B dans Ω . Alors ψ est mesurable ssi $X_n \circ \psi$ l'est pour tout n .

DÉM : Il suffit de montrer que si chacune des $X_n \circ \psi$ sont mesurables, alors ψ l'est aussi. Or $\{A \in \mathcal{F} : \psi^{-1}(A) \in \mathcal{G}\}$ est une tribu qui par hypothèse contient tous les $X_n^{-1}(y), y \in E$ et rend donc les X_n mesurables. Cette tribu contient alors naturellement \mathcal{F} toute entière par minimalité de \mathcal{F} .

Remarque : D'après ce résultat les opérateurs de translation sont mesurables.

Théorème 2.1 : Chaîne de Markov canonique.

Soit Q une matrice stochastique sur E et soit $x \in E$. Il existe une unique probabilité, notée \mathbb{P}_x , sur Ω , telle que sous \mathbb{P}_x , le processus des coordonnées (X_n) définisse une chaîne de Markov de matrice de transition Q , telle que $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$.

DÉM : La proposition 2.3 permet de construire un espace $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ et un processus (X_n^x) qui est une chaîne de Markov de matrice de transition Q telle que $X_0^x = x$. On définit \mathbb{P}_x comme la mesure image de P' par l'application :

$$\begin{cases} \Omega' & \longrightarrow & \Omega \\ \omega' & \longrightarrow & ((X_n^x(\omega'))_{n \in \mathbb{N}}) \end{cases}$$

Cette application est mesurable grâce à la propriété précédente. On a $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = P'(X_0^x = x) = 1$ et $\mathbb{P}_x(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P'(X_0^x = x_0, \dots, X_n^x = x_n)$ par définition d'une mesure image. Puis en utilisant la proposition 2.1, $= P'(X_0^x = x_0)Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{n-1}, x_n) = \mathbb{P}_x(X_0 = x_0)Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{n-1}, x_n)$ et en utilisant la réciproque de la proposition 2.1, on obtient bien que sous \mathbb{P}_x , le processus des coordonnées est une chaîne de Markov de matrice de transition Q . Pour l'unicité on constate que toutes les mesures satisfaisant à la propriété du théorème coïncident sur les cylindres. Or les cylindres forment une classe stable par intersection finie qui engendrent \mathcal{F} et le lemme de classe monotone permet de conclure qu'elles sont égales.

Remarque : On déduit immédiatement de la proposition 2.1 que $\mathbb{P}_x(X_n = x_n) = Q_n(x, x_n)$.

Il se pose le problème de la loi initiale pour montrer que l'on peut toujours ramener un problème sur une chaîne de Markov à la chaîne de Markov canonique. Pour cela, si μ est une mesure de probabilité sur E , on pose

$\mathbb{P}_\mu = \sum_x \mu(x) \mathbb{P}_x$. On vérifie que c'est une mesure de probabilité et que sous \mathbb{P}_μ , le processus des coordonnées forme une chaîne de Markov de matrice de transition Q et de loi initiale μ .

On notera $\mathbb{E}_x[\cdot]$ l'espérance sous \mathbb{P}_x .

Théorème 2.2 : Propriété de Markov simple.

Soient F et G deux fonctions positives mesurables sur Ω et soit $n \geq 0$. Si F est \mathcal{F}_n mesurable, alors pour tout $x \in E$:

$$\mathbb{E}_x[F \cdot G \circ \theta_n] = \mathbb{E}_x[F \mathbb{E}_{X_n}[G]]$$

DÉM : Il suffit de vérifier le résultat pour F indicatrice d'un cylindre. C'est-à-dire $F = \mathbf{1}_{\{X_0=x_0, \dots, X_n=x_n\}}$. Pour cela, on commence par choisir $G = \mathbf{1}_{\{X_0=y_0, \dots, X_p=y_p\}}$. Alors $\mathbb{E}_y[G] = \mathbb{P}_y(X_0 = y_0, \dots, X_p = y_p) = \mathbf{1}_{\{y_0=y\}} Q(y_0, y_1) \dots Q(y_{p-1}, y_p)$ et donc :

$$\mathbb{E}_x[F \mathbb{E}_{X_n}[G]] = \mathbf{1}_{\{x=x_0\}} Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{n-1}, x_n) \mathbf{1}_{\{x_n=y_0\}} Q(y_0, y_1) \dots Q(y_{p-1}, y_p).$$

D'autre part, on a $\mathbb{E}_x[F \cdot G \circ \theta_n] = \mathbb{P}_x(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = y_0, \dots, X_{n+p} = y_p)$. Soit en utilisant la proposition 2.1, $\mathbf{1}_{\{x=x_0\}} Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{n-1}, x_n) \mathbf{1}_{\{x_n=y_0\}} Q(y_0, y_1) \dots Q(y_{p-1}, y_p)$. Ce qui donne le résultat. Le lemme de classe monotone montre que le résultat reste vrai pour toute fonction $G = \mathbf{1}_A$ $A \in \mathcal{F}$, ce qui permet de conclure.

2.3 Problème de Dirichlet discret.

Dans toute la suite, on fixe une matrice stochastique Q qui sera en pratique celle de la marche aléatoire simple dans \mathbb{Z}^d .

Définition 2.4 : Fonction harmonique.

Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est dite harmonique lorsque pour tout x de E , on a :

$$f(x) = Qf(x)$$

Définition 2.5 : Problème de Dirichlet :

Soit F une partie finie de \mathbb{Z}^d . On définit $\partial F = \{y \notin F : \exists x \in F, |y - x| = 1\}$. C'est la frontière de F . On note $\bar{F} = F \cup \partial F$ l'adhérence de F . On se donne une fonction g définie sur ∂F . Le problème consiste à montrer l'existence et l'unicité d'une fonction définie sur \bar{F} , harmonique sur F , et qui coïncide avec g sur ∂F .

Définition 2.6 :

Pour G une partie de \mathbb{Z}^d , on définit :

$$T_G = \inf\{n \geq 0 : X_n \in G\}$$

T_G est un temps d'arrêt de la filtration \mathcal{F}_n car $\{T_G = n\} = \{X_0 \notin G\} \cap \dots \cap \{X_{n-1} \notin G\} \cap \{X_n \in G\}$ et chacun de ces ensembles est \mathcal{F}_n mesurable.

On peut alors définir la variable aléatoire : $X_{T_G} \mathbf{1}_{\{T_G < \infty\}}$ comme X_n si $T = n$ et 0 si $T = \infty$.

Théorème 2.3 :

Soit F un sous-ensemble non-vide de E et posons G le complémentaire de F . Soit $g : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction bornée. Alors :

- (i) La fonction : $h(x) = \mathbb{E}_x[g(X_{T_G}) \mathbf{1}_{\{T_G < \infty\}}]$ est harmonique sur F .
- (ii) Si $T_G < \infty$ \mathbb{P}_x p.s. pour tout x . Alors h est l'unique fonction harmonique sur E qui est harmonique sur F et coïncide avec g sur G .

DÉM : On remarque que si $x \in F$, on a \mathbb{P}_x p.s. :

$$g(X_{T_G}) \mathbf{1}_{\{T_G < +\infty\}} = g(X_{T_G} \circ \theta_1) \mathbf{1}_{\{T_G \circ \theta_1 < \infty\}}$$

Ce qui veut simplement dire que le point de sortie de la trajectoire est le même une fois qu'on a "gommé" le premier point qui était dans F et donc ne jouait pas de rôle. Et donc, si l'on pose $U(\omega) =$

$g(X_{T_G(\omega)})\mathbf{1}_{\{T_G(\omega) < +\infty\}}$, on a \mathbb{P}_x p.s, $U = U \circ \theta_1$. En utilisant la propriété de Markov simple, on a donc, pour $x \in F$:

$$h(x) = \mathbb{E}_x[U] = \mathbb{E}_x[U \circ \theta_1] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_1}[U]] = \mathbb{E}_x[h(X_1)] = Qh(x)$$

Ce qui montre que h est harmonique sur F . Comme sur G , $T_G = 0$, il est clair qu'on a $h = g$ sur G . On admet l'unicité de la solution, qui nécessite un recours aux martingales, et allonge considérablement la preuve.

On peut alors poser clairement le problème de Dirichlet discret et le résoudre avec cette méthode. On choisit F une partie finie de \mathbb{Z}^2 (qui est bien dénombrable). Une fonction h définie sur \bar{F} est dite harmonique sur F si pour tout x de F , $h(x)$ est égal à la moyenne de h sur les 4 plus proches voisins de x . On retrouve la notion précédente en prenant comme chaîne de Markov la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^2 : $Q(x, x \pm e_i) = 1/4$. Alors en utilisant le théorème précédent, on obtient que pour toute fonction g positive définie sur ∂F , la seule fonction $h : \bar{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui soit harmonique sur F et coïncide avec g sur ∂F est donnée par :

$$h(x) = \mathbb{E}_x[g(X_{T_{\partial F}})]$$

où

$$T_{\partial F} = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \partial F\}$$

En effet, d'après la fin de la première partie, le temps d'arrêt $T_{\partial F}$ est fini \mathbb{P}_x presque sûrement puisque la marche aléatoire issue de x visite tous les points du plan. (Une translation montre que cela reste vrai pour tout x).

3 Problème classique et traitement informatique.

3.1 Mouvement Brownien.

Tout d'abord, introduisons le mouvement brownien, qui sera le pendant des marches aléatoires discrètes dans le cas continu.

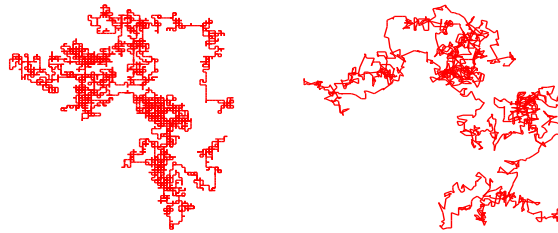
Définition 3.1 :

On appelle mouvement Brownien (en dimension 1, issu de 0), une famille $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de v.a. à valeurs réelles, vérifiant les deux propriétés suivantes :

- (1) $B_0 = 0$ p.s. et pour tout $p \geq 0$ et tous réels $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p$, les v.a. $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_p} - B_{t_{p-1}}$ sont indépendantes et pour tout j , $B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ a une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, t_j - t_{j-1})$.
- (2) Pour tout ω , $t \rightarrow B_t(\omega)$ est continue.

Remarque : Un mouvement Brownien en dimension d est un vecteur (B_1, \dots, B_d) de mouvements Browniens unidimensionnels.

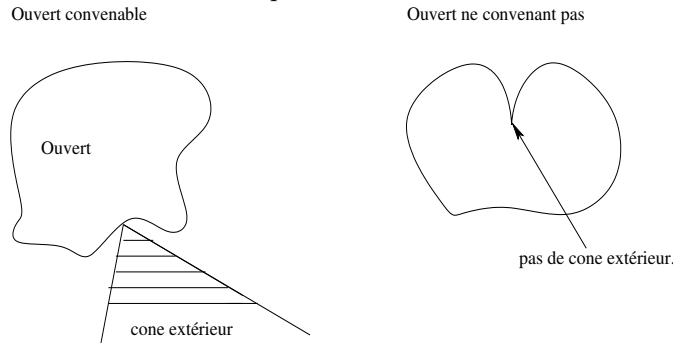
Remarque : Un mouvement Brownien issu de x est $B + x$, où B est de la forme ci-dessus. En utilisant la propriété que nous avons démontrée sur la convergence en loi de marches aléatoires, il apparaît qu'intuitivement (et c'est le cas rigoureusement !), le mouvement Brownien est une "limite" de marches aléatoires convenablement changées d'échelle. Cela explique la ressemblance des trajectoires obtenues pour une marche aléatoire et un brownien simulé :



Marche aléatoire Mouvement Brownien simulé

Notons que Caml ne génère pas de variable aléatoire gaussienne. Pour les obtenir, nous avons dû utiliser que si U et V sont des variables aléatoires de loi uniforme sur $[0; 1]$, alors $\sqrt{-2 \ln(U)} \cos(2\pi V)$ a une loi gaussienne.

Pour ce qui est de la résolution du problème de Dirichlet classique avec des mouvements browniens, nous n'avons malheureusement pas eu le temps (ni la capacité?) d'assimiler à temps les notions nécessaires. Nous admettons alors que la formule proposée dans le cas discret continue de fonctionner, à condition de remplacer X_n par B_t et \mathbb{P}_x par une mesure de probabilité sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ qui est la mesure de Wiener. Pour cela, il faut cependant que l'ouvert vérifie la condition de "cône extérieur". Cela signifie qu'en tout point de la frontière de l'ouvert, on peut placer un cône ne rencontrant pas l'ouvert.



3.2 Résolution informatique.

3.2.1 Présentation de l'algorithme.

Pour calculer l'espérance, qui donne la valeur de la solution au point considéré, nous lançons n marches aléatoires du point x , nous notons la valeur de la condition aux limites au point de sortie, puis nous faisons la

moyenne de ces n valeurs obtenues. C'est ce que réalise ce programme dans le cas discret :

```
#open "graphx";;  
load_object "graphx";;
```

Calcul d'une valeur approchée de $\mathbb{E}_{(x,y)}(f(B_T))$:

```
let dirichlet ouvert f x y n =  
  let m = ref 0. in  
    for i = 1 to n do (* lancer de n marches aléatoires *)  
      let a = ref x and b = ref y in  
while ouvert !a !b do  
  let u = random__int 4 in  
    if u = 0 then a := !a + 1  
    else if u = 1 then a := !a - 1  
    else if u = 2 then b := !b + 1  
    else b := !b - 1  
done;  
m := !m +. (f !a !b ); (* récupération de la valeur  
                        de la condition aux limites  
                        au point de sortie *)  
done;  
!m /. (float_of_int n);; (* renvoi du résultat *)
```

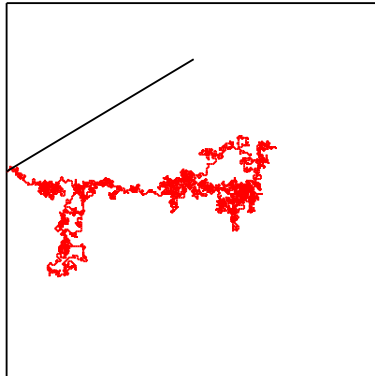
Ainsi, "ouvert" est une fonction de type

int-> int-> bool

qui décrit l'ouvert de définition, "f" est la condition aux limites et la fonction dirichlet est de type

(int-> int-> bool)-> (int->int->float)->int->int->int->float

Voici une représentation de ce que fait la fonction dirichlet n fois :



Afin d'obtenir une représentation graphique du résultat obtenu, nous stockons ces résultats dans une matrice par la fonction suivante :

```
let solution ouvert f n =  
  let t1 = borne_ouvert ouvert in (* fonction auxiliaire calculant  
                                  la taille de la matrice *)  
    let m = mat_float (t1+1) in (* fabrication de la matrice *)  
    for x = 0 to t1 do  
      for y = 0 to t1 do  
if ouvert x y then
```

```

m.(x).(y) <- dirichlet ouvert f x y n (* remplissage *)
else if frontiere ouvert x y then (* coloration en noir de
                                la frontière *)
    m.(x).(y) <- 0.
else m.(x).(y) <- 100. (* coloration en blanc du reste *)
    done;
done;
m;;

```

où :

```

let frontiere ouvert x y =
  if not (ouvert x y) then
    if (ouvert (x+1) y)|| (ouvert (x-1) y)|| (ouvert x (y+1))|| (ouvert x (y-1)) then true
    else false
  else false;;

```

décrit la frontière de l'ouvert en question, en vue de la coloriser en noir, ce qui améliore la lisibilité. On peut alors représenter la solution, en prenant une convention de coloration :

```

let couleur i =
  match i with
  |0 -> black |1 -> red |2 -> yellow |3 -> green
  |4 -> blue |5 -> cyan |6 -> white;;

```

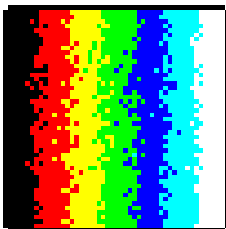
Ces couleurs sont choisies pour représenter au mieux le cas où le potentiel est la température. Le chaud étant alors représenté en blanc et le froid en noir. On est alors en mesure d'écrire le programme suivant :

```

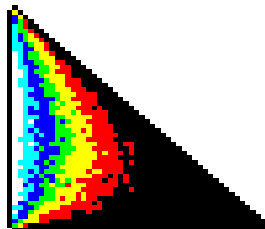
let graphe_solution ouvert f n =
  let graphe_mat m =
    clear_graph();
    let t1 = vect_length m.(0) in
    let p = max m in (* détermination du max de la matrice *)
    for i = 0 to (t1 - 1) do
      for j = 0 to (t1 - 1) do
let c = int_of_float (7. *. (m.(i).(j) /. (p +. 1.))) in
      set_color (couleur c); (* affectation d'une couleur *)
      fill_rect {x=i; y=j} 1 1; (* représentation *)
    done;
  done;
in
open_graph " 640x640";
let m = solution ouvert f n in
  graphe_mat m;;

```

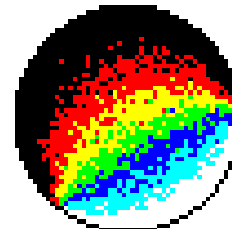
Donnons des exemples de résolution dans divers cas :



Le potentiel au bord ne dépend que de x . On trouve bien un potentiel intérieur du même genre.



On se place sur un triangle dont un côté seulement est chauffé.



On se place sur un disque dont on a chauffé un secteur angulaire.

Dans le cas continu, les programmes sont identiques à condition de remplacer la marche aléatoire par un brownien (il faut tout de même faire quelques adaptations!).

3.3 Complexité.

Afin d'évaluer la complexité moyenne de cet algorithme, il convient de simplifier les choses. On introduit donc $T_n = \inf\{k : |S_k| = n\}$ qui représente le temps de sortie de l'intervalle $[-n; n]$ d'une marche aléatoire de loi de variance σ^2 . Calculons son espérance en montrant que $S_n^2 - \sigma^2 n$ est une martingale pour la filtration naturelle du processus X_n (i.e $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$). Ces variables sont clairement intégrables, et $E[S_{n+1}^2 - (n+1)\sigma^2 | \mathcal{F}_n] = E[X_{n+1}^2 + 2X_{n+1}S_n + S_n^2 - (n+1)\sigma^2 | \mathcal{F}_n]$. On utilise alors les propriétés de l'espérance conditionnelle et le fait que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$:

- $E[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = E[X_{n+1}^2] = \sigma^2$ par indépendance de X_{n+1} par rapport à \mathcal{F}_n .
- $E[2X_{n+1}S_n | \mathcal{F}_n] = 2S_n E[X_{n+1}] = 0$ car S_n est \mathcal{F}_n mesurable.
- $E[S_n^2 | \mathcal{F}_n] = S_n^2$ car S_n est \mathcal{F}_n mesurable.

On obtient bien le résultat annoncé. En appliquant le théorème d'arrêt (admis...) à cette martingale, on montre que le processus $S_{k \wedge T_n}^2 - \frac{1}{2}k \wedge T_n$ est une martingale. En prenant l'espérance, il vient : $E[S_{k \wedge T_n}^2] = \frac{1}{2}E[k \wedge T_n]$. Et une application du théorème de convergence dominée de Lebesgue à chacun des deux membres montre que :

$$E[T_n] = \left(\frac{n}{\sigma}\right)^2$$

Cela montre que pour chaque point dont on calcule le potentiel approché, on réalise de l'ordre de T^2 opérations, où T désigne la taille de l'ouvert. Comme on fait cela pour T^2 points à peu près, le programme a une complexité en $n\mathcal{O}(T^4)$ où n désigne le nombre de calcul pour chaque point. C'est une complexité très mauvaise. Cependant, elle a l'avantage de ne pas dépendre de la géométrie de la frontière.

Références

- [1] Walter RUDIN. Analyse réelle et complexe. Dunod 1998
- [2] Internautes. [http ://les-mathématiques.net/forum](http://les-mathematiques.net/forum)
- [3] J-F. LE GALL. Intégration, probabilités et processus aléatoires.
- [4] S. COHEN. Chercheur au CICT, Université PAUL SABATIER.